УДК 517.988.63, 515.124.4
DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-65-73

К ТЕОРЕМЕ АРУТЮНОВА О ТОЧКАХ СОВПАДЕНИЯ ДВУХ ОТОБРАЖЕНИЙ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

© В. Мерчела

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: merchela.wassim@gmail.com.

Аннотация. В теореме Арутюнова утверждается, что действующие из полного метрического пространства (X,ρ_X) в метрическое пространство (Y,ρ_Y) отображения $\psi,\varphi,$ одно из которых является α-накрывающим, а второе — β-липшицевым, $\alpha>\beta,$ имеют точку совпадения, то есть существует решение уравнения $\psi(x)=\varphi(x).$ Показано, что это утверждение остается справедливым и в случае, если пространство Y не является метрическим, достаточно, чтобы функция $\rho_Y : Y^2 \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяла только аксиоме тождества. Функция ρ_Y может не быть симметрической и не отвечать неравенству треугольника, более того, не обязана удовлетворять f-неравенству треугольника (то есть возможно, что пространство Y даже не f-квазиметрическое).
Ключевые слова: точка совпадения; метрическое пространство; накрывающее отображение; липшицево отображение

Введение

А.В. Арутюновым в [1] получены условия существования и оценки точек совпадения отображений ψ,φ, действующих из метрического пространства X в метрическое пространство Y. Эти утверждения в последние время находят многочисленные приложения в дифференциальных уравнениях (см. [2]–[4]), интегральных уравнениях (см. [5]), в задачах управления (см. [6]). Требования теоремы Арутюнова к расстоянию могут быть ослаблены. В работе [7] получены аналогичные результаты в (q_1,q_2)— квазиметрических пространствах. В данной работе пространство X предполагается метрическим, а от расстояния в Y только требуется выполнения аксиомы тождества. Такое ослабление условий существования точки совпадения позволяет уточнить, в том числе, и некоторые утверждения процитированных выше работ.

1. Основные понятия

Пусть заданы: метрическое пространство $X = (X, \rho_X)$ и непустое множество Y, на котором определено *расстояние* — отображение $\rho_Y : Y^2 \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющее условию
$$\forall y_1, y_2 \in Y \quad \rho_Y(y_1, y_2) = 0 \;\Leftrightarrow\; y_1 = y_2. \tag{1.1}$$
В пространстве Y определим понятие *сходимости* последовательности $\{y_i\} \subset Y$ к элементу $y \in Y$ при $i \to \infty$ соотношением
$$y_i \to y \;\Leftrightarrow\; \max\bigl\{\rho_Y(y_i, y),\, \rho_Y(y, y_i)\bigr\} \to 0.$$

Для отображений, действующих из X в Y, пользуемся следующими «обычными определениями». Отображение $f : X \to Y$ называем *непрерывным в точке* $x \in X$, если для любой сходящейся к x последовательности $\{x_i\}$ выполнено $f(x_i) \to f(x)$. Отображение $f : X \to Y$ называем *замкнутым* в точке $x \in X$, если из сходимости к x последовательности $\{x_i\} \subset X$ и существования $y \in Y$ такого, что $f(x_i) \to y$ следует равенство $f(x) = y$. Отображение, непрерывное (замкнутое) во всех точках, называем *непрерывным* (*замкнутым*). Отображение $f : X \to Y$ называем β*-липшицевым*, $\beta \geq 0$, если при любых $x_1, x_2 \in X$ выполнено $\rho_Y\bigl(f(x_1), f(x_2)\bigr) \leq \rho_X(x_1, x_2)$. Если отображение β-липшицево, то оно непрерывно. Из непрерывности отображения, очевидно, следует его замкнутость.

Формально переносим на отображения рассматриваемых пространств следующее определение [1].

Определение 1.1. Пусть $\alpha > 0$. Отображение $f : X \to Y$ называется α*-накрывающим*, если выполнено соотношение
$$\forall x_0 \in X \quad \forall y \in Y \quad \exists x \in X :\; f(x) = y \quad \text{и} \quad \rho_X(x, x_0) \leq \frac{1}{\alpha}\rho_Y\bigl(f(x), f(x_0)\bigr).$$

2. Теорема о точке совпадения отображений

Приведем утверждение, аналогичное теореме Арутюнова, но в котором не требуется, чтобы Y было метрическим пространством. Полагаем, что заданы отображения $\psi, \varphi : X \to Y$. Точкой совпадения этих отображений называют элемент $\xi \in X$ такой, что $\psi(\xi) = \varphi(\xi)$.

Теорема 2.1. *Пусть метрическое пространство является полным и выполнены следующие условия: отображение* $\psi : X \to Y$ *является* α*-накрывающим и замкнутым; отображение* $\varphi : X \to Y$ *является* β*-липшицевым. Тогда, если* $\alpha > \beta$, *то множество точек совпадения отображений* ψ, φ *не пусто, кроме того,*
$$\forall x_0 \in X \quad \exists \xi \in X :\; \psi(\xi) = \varphi(\xi) \;\text{ и }\; \rho_X(\xi, x_0) \leq \frac{1}{\alpha - \beta}\rho_Y\bigl(\psi(x_0), \varphi(x_0)\bigr). \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$. Построим последовательность $\{x_n\} \subset X$ следующим образом.

Так как отображение ψ является α-накрывающим, то существует $x_1 \in X$ такой, что

$$\psi(x_1) = \varphi(x_0), \quad \rho_X(x_1, x_0) \le \frac{1}{\alpha}\rho_Y(\psi(x_1), \psi(x_0)) = \frac{1}{\alpha}\rho_Y\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big).$$

Вследствие липшицевости отображения φ выполнено неравенство

$$\rho_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_0)) \le \beta\rho_X(x_1, x_0).$$

Снова, в силу $\alpha-$ накрывания отображения ψ, существует $x_2 \in X$ такой, что $\psi(x_2) = \varphi(x_1)$, и имеют место неравенства

$$\rho_X(x_2, x_1) \le \frac{1}{\alpha}\rho_Y(\psi(x_2), \psi(x_1)) \le \frac{1}{\alpha}\rho_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_0)) \le \frac{\beta}{\alpha}\rho_X(x_1, x_0).$$

Аналогично, при каждом натуральном n устанавливается существование элемента $x_n \in X$, для которого справедливы соотношения

$$\psi(x_n) = \varphi(x_{n-1}), \tag{2.2}$$

$$\rho_X(x_n, x_{n-1}) \le \frac{\beta}{\alpha}\rho_X(x_{n-1}, x_{n-2}) \le \frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-1}}\rho_X(x_1, x_0). \tag{2.3}$$

Покажем, что построенная последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. Из неравенства треугольника, учитывая $\alpha > \beta$, для любых $n < m$ получаем

$$\rho_X(x_n, x_m) \le \rho_X(x_n, x_{n+1}) + \rho_X(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots \rho_X(x_{m-1}, x_m) \le$$
$$\le \frac{\beta^n}{\alpha^n}\frac{\rho_Y\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big)}{\alpha} + \frac{\beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}}\frac{\rho_Y\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big)}{\alpha} + \cdots + \frac{\beta^{m-1}}{\alpha^{m-1}}\frac{\rho_Y\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big)}{\alpha} \le$$
$$\le \Big(\frac{\beta^n}{\alpha^n} + \frac{\beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}} + \cdots + \frac{\beta^{m-1}}{\alpha^{m-1}}\Big)\frac{\rho_Y\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big)}{\alpha} \le \Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^n \frac{1}{\alpha-\beta}\rho_Y\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big).$$

Таким образом, для любого $\epsilon > 0$, если выбрать

$$N = \log_{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{\epsilon(\alpha-\beta)}{\rho_Y\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big)},$$

то при всех $n, m > N$ будет выполнено неравенство $\rho_X(x_n, x_m) < \epsilon$.

Итак, последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной, и в полном пространстве X сходится к некоторой точке ξ. Докажем, что ξ есть точка совпадения отображений ψ и φ. Вследствие непрерывности липшицева отображения φ получаем $\varphi(\xi) = \lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)$. Согласно равенству (2.2) выполнено $\lim_{n\to\infty}\psi(x_n) = \lim_{n\to\infty}\varphi(x_{n-1}) = \varphi(\xi)$. Отсюда в силу замкнутости отображения ψ получаем соотношение

$$\psi(\xi) = \lim_{n\to\infty}\psi(x_n) = \varphi(\xi).$$

Теперь докажем справедливость соотношения (2.1). Из неравенств (2.3) при любим n имеем

$$\rho_X(x_0, x_n) \le \rho_X(x_0, x_1) + \rho_X(x_1, x_2) + \cdots \rho_X(x_n, x_n) \le$$
$$\le \Big(1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \cdots + \frac{\beta^n}{\alpha^n}\Big)\frac{\rho_Y\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big)}{\alpha} \le \frac{1}{\alpha-\beta}\rho_Y\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ получаем неравенство (2.1). □

3. Примеры

Приведем примеры отображений, удовлетворяющих условиям теоремы 1, действующих из метрического пространства во множество, не являющееся метрическим пространством. Последнее обстоятельство не позволяет применить к ним результаты [1], в то же время, теорема 1 гарантирует существование точек совпадения и соответствующую оценку (2.1).

П р и м е р 3.1. Пусть каждое из множеств X, Y состоит из пяти элементов: $X = \{x_i,\ i=\overline{1,5}\}$, $Y = \{y_i,\ i=\overline{1,5}\}$. В множестве X определим расстояние $\rho_X : X^2 \to \mathbb{R}_+$ формулой

$$\begin{aligned}&\rho_Y(y_1,y_2)=\rho_Y(y_2,y_1)=\rho_Y(y_1,y_5)=\rho_Y(y_5,y_1)=\rho_Y(y_2,y_5)=\rho_Y(y_5,y_2)=1/2,\\&\rho_Y(y_i,y_i)=0 \text{ при } i=\overline{1,5},\quad \rho_Y(y_i,y_j)=3 \text{ при остальных } (i,j).\end{aligned}$$

Очевидно, X является полным метрическим пространством.

На множестве Y зададим расстояние $\rho_Y : Y^2 \to \mathbb{R}_+$ соотношениями

$$\begin{aligned}&\rho_Y(y_1,y_2)=\rho_Y(y_2,y_1)=1,\quad \rho_Y(y_1,y_5)=\rho_Y(y_5,y_1)=1/3,\\&\rho_Y(y_1,y_4)=\rho_Y(y_4,y_1)=2,\quad \rho_Y(y_2,y_5)=\rho_Y(y_5,y_2)=1/2,\\&\rho_Y(y_i,y_i)=0 \text{ при } i=\overline{1,5},\quad \rho_Y(y_i,y_j)=3 \text{ при остальных } (i,j).\end{aligned}$$

Это отображение не удовлетворяет неравенству треугольника, так как

$$\rho_Y(y_1,y_5)=1/3,\ \rho_Y(y_5,y_2)=1/2,\ \rho_Y(y_1,y_2)=1>1/3+1/2.$$

Таким образом, к отображениям, действующим в множество Y, не применима теорема Арутюнова [1] о точках совпадения. Однако, то обстоятельство, что Y не является метрическим пространством, не препятствует применению теоремы 1.

Пусть отображение $\psi : X \to Y$ определено следующим образом

$$\psi(x_i)=y_i.$$

Это отображения является накрывающим с коэффициентом

$$\alpha=\min\left\{\frac{\rho_Y(y_i,y_j)}{\rho_X(x_i,x_j)},\ i\neq j,\ i,j=\overline{1,5}\right\}=\frac{2}{3}.$$

Определим отображение $\varphi : X \to Y$ равенствами

$$\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=\varphi(x_5)=y_1,\ \varphi(x_3)=y_5,\ \varphi(x_4)=y_2.$$

Это отображения является липшицевым с коэффициентом

$$\beta=\max\left\{\frac{\rho_Y\big(\varphi(x_i),\varphi(x_j)\big)}{\rho_X(x_i,x_j)},\ i\neq j,\ i,j=\overline{1,5}\right\}=$$

$$\max\left\{\frac{\rho_Y(y_1,y_5)}{\rho_X(x_2,x_3)},\frac{\rho_Y(y_1,y_2)}{\rho_X(x_1,x_4)},\frac{\rho_Y(y_1,y_2)}{\rho_X(x_4,x_2)},\frac{\rho_Y(y_1,y_5)}{\rho_X(x_1,x_3)},\frac{\rho_Y(y_1,y_2)}{\rho_X(x_5,x_4)},\frac{\rho_Y(y_1,y_5)}{\rho_X(x_5,x_3)},\frac{\rho_Y(y_5,y_2)}{\rho_X(x_3,x_4)}\right\}=\frac{1}{3}.$$

Итак, $\beta < \alpha$ и выполнены все условия теоремы 1, отображения ψ, φ имеют точку совпадения.

Отметим, что в рассмотренном примере не только Y не является метрическим пространством, но и каждое множество $\psi(X) \supset \varphi(X)$ (с индуцированным расстоянием) также не является метрическим пространством.

Прежде чем привести следующий пример, сформулируем определение f-квазиметрического пространства (подробнее см. [8]).

Пусть задана функция $f : {\mathbb{R}_+}^2 \to \mathbb{R}_+$ такая, что

$$(r_1, r_2) \to (0,0) \ \Rightarrow \ f(r_1, r_2) \to 0; \tag{3.1}$$

говорят, что расстояние $\rho : X^2 \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет *f-неравенству треугольника*, если выполнено соотношение

$$\exists \sigma > 0 \ \ \forall x, y, z \in X \ \ \rho(x,y) < \sigma, \ \rho(y,z) < \sigma \ \Rightarrow \ \rho(x,z) \le f\big(\rho(x,y), \rho(y,z)\big). \tag{3.2}$$

При выполнении условий (1.1), (3.2) отображение ρ называют *f-квазиметрикой*, а пространство (X, ρ) называют *f-квазиметрическим* [8]. Согласно [8] f-неравенство треугольника равносильно *асимптотическому неравенству треугольника*:

$$\forall \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, \{y_i\}_{i=1}^{\infty}, \{z_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X \ \ \rho(x_i, y_i) \to 0, \ \ \rho(y_i, z_i) \to 0 \ \Rightarrow \ \rho(x_i, z_i) \to 0, \tag{3.3}$$

то есть, если расстояние ρ удовлетворяет условию (3.2) с функцией f, обладающей свойством (3.1), то ρ удовлетворяет и соотношению (3.3); обратно, из (3.3) следует существование функции f такой, что имеет место (3.1) и справедливо (3.2).

П р и м е р 3.2. Обозначим через $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ множества натуральных и целых чисел, соответственно; символом $[\,\cdot\,]$ — целую часть действительного числа.

Пусть $X = \{x_i, \, i \in \mathbb{Z}\}$. Определим на этом множестве метрику — симметрическую функцию $\rho_X : X^2 \to \mathbb{R}_+$, равную

$$\rho_X(x_i, x_{i+1}) = \begin{cases} 1, & i = 2k, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \frac{1}{k+2}, & i = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{cases}$$

$$\rho_X(x_{-i}, x_{-i-1}) = \frac{1}{2([\frac{i}{2}] + 2)}, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

$$\rho_X(x_i, x_{i+m}) = \sum_{j=i}^{i+m-1} \rho_X(x_j, x_{j+1}), \quad i \in \mathbb{Z}, \ m \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, для такой функции выполнено неравенство треугольника.

Покажем что X является полным метрическим пространством. Любая последовательность, содержащая бесконечно много различных элементов этого множества, не является фундаментальной, так как для любого i вследствие расходимости гармонического ряда выполнено $\lim\limits_{j\to\infty} \rho_X(x_i, x_j) = \infty$, $\lim\limits_{j\to-\infty} \rho_X(x_i, x_j) = \infty$. Таким образом, фундаментальной может быть только последовательность, которая начиная с некоторого номера постоянна, и такая последовательность, очевидно, сходится.

Далее, зададим множество $Y = \{y_i,\, i \in \mathbb{Z}\}$ и определим в нём расстояние — симметрическую функцию $\rho_Y : Y^2 \to \mathbb{R}_+$ со следующими значениями:

$$\forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \rho_Y(y_i, y_{i+1}) = \frac{1}{[\frac{i}{2}] + 2}, \quad \rho_Y(y_i, y_{i+2}) = 1;$$

$$\rho_Y(y_{-i}, y_{-i-1}) = \begin{cases} 2, & i = 2k, \\ 1, & i = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \end{cases} \quad \rho_Y(y_{-i}, y_{-i-2}) = 3;$$

$$\rho_Y(y_i, y_{i+m}) = \begin{cases} k, & m = 2k, \\ k + \dfrac{1}{[\frac{i+2k}{2}] + 2}, & m = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

$$\rho_Y(y_{-i}, y_{-i-m}) = \sum_{s=i}^{i+m-1} \rho_Y(y_{-s}, y_{-s-1}), \quad \rho_Y(y_{-i}, y_m) = \rho_Y(y_{-i}, y_0) + \rho_Y(y_0, y_m), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что Y не является метрическом пространством, так как при любом $i \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\rho_Y(y_i, y_{i+1}) + \rho_Y(y_{i+1}, y_{i+2}) \le \rho_Y(y_i, y_{i+2}).$$

Более того, Y не является даже f—квазиметрическим пространством. Действительно, для последовательностей $\{y_i\}$, $\{y_{i+1}\}$, $\{y_{i+2}\}$ имеют место сходимости $\rho_Y(y_i, y_{i+1}) \to 0$, $\rho_Y(y_{i+1}, y_{i+2}) \to 0$, но $\rho_Y(y_i, y_{i+2}) = 1$. Таким образом, асимптотическое неравенство треугольника (3.3) нарушено.

Определим отображение $\varphi : X \to Y$ соотношениями

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad \varphi(x_{-i}) = y_0 \ \ \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Отображение φ является липшицевым с коэффициентом

$$\beta = \max_{i,j \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \left\{ \frac{\rho_Y\big(\varphi(x_i), \varphi(x_j)\big)}{\rho_X(x_i, x_j)} \right\} = \max_{i,j \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \left\{ \frac{\rho_Y(y_i, y_j)}{\rho_X(x_i, x_j)} \right\} = \max \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \right\} = 1.$$

Определим отображение

$$\psi : X \to Y, \quad \psi(x_i) = y_{-i} \ \ i \in \mathbb{Z},$$

Это отображение (как и любое определенное на данном пространстве X отображение) является непрерывным, поскольку для любой сходящейся к $x \in X$ последовательности $\{x_{i_n}\} \subset X$ существует такое n_0, что при всех $n \ge n_0$ выполнено $x_{i_n} = x$. Тогда $\psi(x_{i_n}) = \psi(x)$, и таким образом $\psi(x_{i_n}) \to \psi(x)$.

Отображение $\psi : X \to Y$ является накрывающим с коэффициентом

$$\alpha = \min_{i,j \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\rho_Y\big(\psi(x_i), \psi(x_j)\big)}{\rho_X(x_i, x_j)} \right\} = \min_{i,j \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\rho_Y(y_{-i}, y_{-j})}{\rho_X(x_i, x_j)} \right\} = 2 > \beta.$$

Итак, выполнены все условия теоремы 1, и отображения φ и ψ имеют точку совпадения. Результаты [1] в данном случае не применимы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады АН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.

2. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

3. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.

4. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439–455.

5. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. Vol. 75. № 3. P. 1026–1044.

6. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 31–56.

7. *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.* Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения // Доклады РАН. 2016. Т. 469. № 5. С. 527–531.

8. *Arutyunov A.V., Greshnov A.V., Lokoutsievskii L.V., Storozhuk K.V.* Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f-quasimetrics // Topology Appl. 2017. Vol. 221. P. 178–194.

Поступила в редакцию 24 декабря 2017 г.
Прошла рецензирование 08 февраля 2018 г.
Принята в печать 20 февраля 2018 г.

Мерчела Вассим, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: merchela.wassim@gmail.com

Для цитирования: *Мерчела В.* К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 121. С. 65–73. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-65-73

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-65-73

ABOUT ARUTYUNOV THEOREM OF COINCIDENCE POINT FOR TWO MAPPING IN METRIC SPACES

© **W. Merchela**

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: merchela.wassim@gmail.com

Abstract. In the famous theorem of Arutyunov, it is asserted that the mappings ψ, φ, acting from the complete metric space (X, ρ_X) to the metric space (Y, ρ_Y), one of which is α-covering and the second is β-Lipschitz, $\alpha > \beta$, have the coincidence point is the solution of the equation $\psi(x) = \varphi(x)$. We show that this assertion remains valid also in the case when the space Y is not metric it is sufficient that the function $\rho_Y : Y^2 \to \mathbb{R}_+$ satisfies only the axiom of identity. The function ρ_Y may not be symmetric and does not correspond to the triangle inequality; moreover, it does not have to satisfy the f-triangle inequality (that is, it is possible that the space Y is not even f-quasimetric)
Keywords: coincidence point; metric space; covering mapping; Lipschitz mapping

REFERENCES

1. Arutyunov A.V. Nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskikh prostranstvakh i nepodvizhnye tochki [Covering mappings in metric spaces and fixed points]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2007, vol. 416, no. 2, pp. 151–155. (In Russian).

2. Avakov E.R., Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S. Nakryvayushchie otobrazheniya i ikh prilozheniya k differentsial'nym uravneniyam, ne razreshennym otnositel'no proizvodnoy [Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 5, pp. 613–634. (In Russian).

3. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O korrektnosti differentsial'nykh uravneniy, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnoy [On the well-posedness of differential equations unsolved for the derivative]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 11, pp. 1523–1537. (In Russian).

4. Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. Nakryvayushchie otobrazheniya v proizvedenii metricheskikh prostranstv i kraevye zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnoy [Covering mappings in a product of metric spaces and boundary value problems for differential equations unsolved for the derivative]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 4, pp. 439–455. (In Russian).

5. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2012, vol. 75, no. 3, pp. 1026–1044.

6. Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. Ob upravlenii ob'ektami, dvizhenie kotorykh opisyvaetsya neyavnymi nelineynymi differentsial'nymi uravneniyami [On controlling objects whose motion is

defined by implicit nonlinear differential equations]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2015, no. 1, pp. 31–56. (In Russian).

7. Arutyunov A.V., Greshnov A.V. Teoriya (q_1, q_2)-kvazimetricheskikh prostranstv i tochki sovpadeniya [Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2016, vol. 469, no. 5, pp. 527–531. (In Russian).

8. Arutyunov A.V., Greshnov A.V., Lokoutsievskii L.V., Storozhuk K.V. Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f-quasimetrics. *Topology Appl.*, 2017, vol. 221, pp. 178–194.

Received 24 December 2017
Reviewed 08 February 2018
Accepted for press 20 February 2018

Merchela Wassim, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate student, Functional Analysis Department, e-mail: merchela.wassim@gmail.com

For citation: Merchela W. K teopeme Arutyunova o tochkakh sovpadenya dvukh otobrazhenii metricheskikh prostranstv [About Arutyunov theorem of coincidence point for two mapping in metric spaces]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 121, pp. 65–73. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-65-73 (In Russian, Abstr. in Engl.).